Série d'exercices N°02 ❦ Nombres Complexes ❦

Dans cette série on considère $\mathscr{P}$ le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$

Exercice N° 01:

Dans $\mathscr{P}$ on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
$z_A = 1 + i$; $z_B = \sqrt{3} - i$; $z_C = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$ et $z_D = 1 + i\sqrt{3}$.

1. Ecrire z_A , z_B et z_D sous forme exponentielle.

2. **(a)** Vérifier que $z_A.z_C = 2z_D$.

(b) En déduire la forme exponentielle de z_C.

(c) Déterminer alors les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3. **(a)** Montrer que le triangle OBD est isocèle en O.

(b) Montrer que le quadrilatère $OBCD$ est un losange.

Exercice N° 02:

Dans $\mathscr{P}$, on considère les points I et A d'affixes respectives 1 et i.
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on désigne par M le point d'affixe z et par M' le point d'affixe $z' = \dfrac{iz}{z-1}$.

1. Déterminer l'ensemble des points M pour les quels $z' = z$.

2. Déterminer l'ensemble Γ des points M tel que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires.

3. Montrer que $AM' \times IM = 1$, puis déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit le cercle de centre I et de rayon 1.

Exercice N° 03:

Dans $\mathscr{P}$ on donne $A(1)$ et $B(3 + 2i)$. On appelle f l'application qui, à tout point M distinct de A et d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{z - 1 + 2i}{z - 1}$.

1. Calculer les affixes des points O' et B', images respectives des points O et B par f. Placer les points A, O', B et B' dans le plan.

2. **(a)** Pour tout nombre complexe z différent de 1, Calculer, le produit $(z'-1)(z-1)$.

(b) En déduire que, pour tout point M distinct de A, on a :
$AM \times AM' = 2$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM'}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. Démontrer que, si M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A passant par O, alors M' appartient à un cercle $\mathscr{C}'$.
En précisera le centre et le rayon. Construire $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

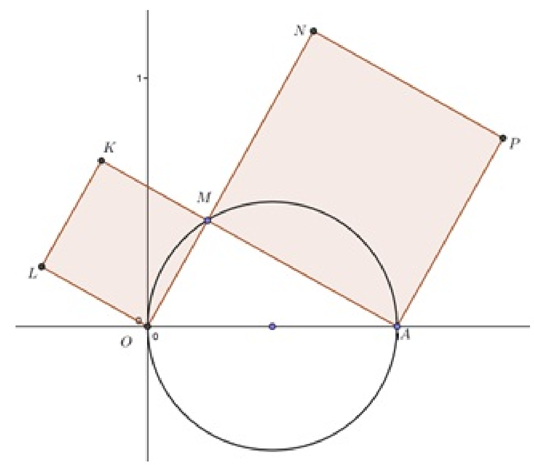
4. **(a)** Déterminer une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}}\right)$.

(b) Démontrer que, si M est un point autre que A de la demi-droite (Δ) d'origine A, passant par B, alors M' appartient à une demi-droite que l'on précisera.

5. On appelle P le point d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la demi-droite (Δ). Placer son image P' sur la figure.

Exercice N° 04:

Dans $\mathscr{P}$ on considère le point A d'affixe 1, $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OA]$ sur lequel on désigne un point M distinct de A et O, les points K et L sont tel que $OMKL$ soit un carré . On pose Z_M ,Z_L et Z_K les affixes respectives de M, L et K.



1. (a) Calculer le module et un argument de $\dfrac{Z_L}{Z_M}$.
   (b) Donner l'écriture exponentielle de $\dfrac{Z_L}{Z_M}$.
   (c) En déduire que $Z_L = iZ_M$
   (d) Déterminer l'affixe du point K en fonction de celui de M.
2. On désigne par M et P deux points tel que $MAPN$ soit un carré.
   On donne $Z_P = -iZ_M + 1 + i$ et $Z_N = (1-i)Z_M + i$ les affixes respectives de P et N.
   (a) Déterminer l'affixe de Ω le milieu du segment $[PL]$.
   (b) Vérifier que Ω est un point fixe sur le cercle $\mathscr{C}$ lorsque M varie.
3. (a) Montrer que $Z_K - Z_\Omega = (1+i)(Z_M - \frac{1}{2})$ et que $Z_N - Z_\Omega = (1-i)(Z_M - \frac{1}{2})$.
   (b) Comparer les distances ΩN et ΩK.
   (c) Montrer que $\dfrac{\text{aff}(\overrightarrow{\Omega K})}{\text{aff}(\overrightarrow{\Omega N})} = i$.
   (d) En déduire la nature du triangle ΩNK.

Exercice N° 05:

Dans $\mathscr{P}$ on considère le point A d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$, le point B tel que le triangle OAB soit équilatérale direct, c'est-à-dire $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et Q le milieu de $[OB]$.

1. (a) Démontrer que B à pour affixe $b = 4 + 2i\sqrt{3}$. En déduire l'affixe q de Q.
   (b) Déterminer l'affixe Z_K du point K tel $ABQK$ que soit un parallélogramme .
   (c) Démontrer que $\dfrac{Z_K - a}{Z_K}$ est imaginaire pur. Que peut-on déduit pour le triangle OKA.
2. Soit C le point d'affixe $c = \dfrac{2a}{3}$. Calculer $\dfrac{Z_K - b}{Z_K - c}$.
   Que peut-on en déduire pour les points B, C et K ? Placer C sur la figure.

Exercice N° 06:

Dans $\mathscr{P}$ on considère les points A et B d'affixes respectifs $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = -1 + i\sqrt{3}$.

1. (a) Ecrire sous forme exponentielle de z_A et z_B.
   (b) Placer les points A et B dans le repère.
   (c) Ecrire $\dfrac{z_B}{z_A}$ sous forme exponentielle.
   (d) Déduire que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O .
   (e) Déterminer l'affixe du point C pour que le quadrilatère $OACB$ soit un carré.
2. Soit un point M d'affixe $z_M = 1 + e^{2i\theta}$ où $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   (a) Montrer que $z_M = 2\cos\theta e^{i\theta}$, puis vérifier que c'est son écriture sous forme exponentielle.
   (b) Déterminer la valeur de θ pour que M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 .
   (c) Déterminer la valeur θ de pour que les points O, A et M soient alignés.

Exercice N° 07:

Dans $\mathscr{P}$ on considère les points A, B, C et E d'affixes respectives :
$z_A = 1 - i$; $z_B = 3i$; $z_C = -3 - 2i$ et $z_E = -i$.

1. (a) Montrer que : ABC est un triangle isocèle et rectangle.
   (b) Déterminer l'affixe de D tel que : $ABDC$ soit un carré.
2. Soit f l'application du plan dans le plan définie par :
   $$f : \mathscr{P} \backslash O \longrightarrow \mathscr{P}$$
   $$M(z) \longmapsto M'(z')$$
   tel que $z' = \dfrac{z - 3i}{iz}$.
   (a) Déterminer l'ensemble (E_1) des points $M(z)$ tel que z' soit réel.
   (b) Montrer que pour tout $z \neq 0$ on a : $iz(z' + i) = -3i$.
   (c) En déduire que si M appartient au cercle de centre O et de rayon 6 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.
3. On suppose que : $z = 3ie^{2i\theta}$ où $\theta \in [0, \pi[$.
   (a) Montrer que : $z' = 2\sin\theta e^{-i\theta}$.
   (b) Déterminer θ pour que M' soit sur le cercle trigonométrique.